**Leçon 170 - Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.**

Cadre : E est un $\mathbb{K}-ev$ de dimension n, avec $car(K) \neq 2$.

# 1. Formes quadratiques et algèbre bilinéaire. —

*1. Définitions et premières propriétés.* —

- Def : b forme bilinéaire symétrique sur E, q forme quadratique sur E. b est appelée forme polaire de q.
- Ex : $q((x,y,z)) = xy + yz + zx$ sur $\mathbb{R}^3$, $q(x) =< x, x >$ sur $\mathbb{R}^n$.
- Exemple sur $\mathbb{C}^3$.
- Pro : Une forme quadratique possède une unique forme polaire. On a un isomorphisme entre l'espace vectoriel des formes quadratiques sur E et celui des formes bilinéaires symétriques sur E.
- Pro : Identités de polarisation : $b(x,y) = \frac{q(x+y)-q(x)-q(y)}{2} = \frac{q(x)+q(y)-q(x-y)}{2} = \frac{q(x+y)-q(x-y)}{4}$
- Ex : $A \mapsto Tr(A^t.A)$ sur $M_n(\mathbb{R})$.

*2. Forme matricielle associée à une forme quadratique.* —

- Pro : Pour B une base de E, on a une unique matrice A telle que $b(x,y) = x^t.A.y$.
- Def : Pour q une forme quadratique sur E et B une base de E, la forme matricielle associée à q sur B est $A := Mat(b, B)$.
- Rem : La dimension de l'espace des formes quadratiques sur E est donc $\frac{n(n+1)}{2}$.
- Pro : Pour $\widetilde{B}$ une autre base de E, P la matrice de passage de B vers $\widetilde{B}$, et A,$\widetilde{A}$ les formes matricielles associées à q sur B,$\widetilde{B}$, on a : $\widetilde{A} = P.A.P^t$.
- Exemple matriciel. Reprendre les exemples d'avant.

*3. Rang et noyau d'une forme quadratique.* —

- Def : Le rang de q, rg(q), est le rang de sa forme matricielle associée sur une base B.
- Rem : Le rang de q est indépendant de la base considérée.
- Def : Le noyau de q, N(q), est $Ker(x \mapsto (y \mapsto b(x,y)))$. C'est l'ensemble des $x \in E$ tq $b(x,.)$ est la forme linéaire nulle.
- Def : Si $N(q) = \{0\}$, on dit que q est non-dégénérée. Elle est dégénérée sinon.
- Pro : q est non-dégénérée $\Leftrightarrow det(A) \neq 0$.
- Def : Une forme quadratique q est définie ssi $q(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- Pro : Si q est non-dégénérée, alors elle est définie.
- Contre-ex : $q((x,y)) = 2xy$ n'est pas définie, mais est non-dégénérée.
- Pro : $dim(E) = rg(q) + dim(N(q))$.

# 2. Orthogonalité et isotropie. —

*1. Orthogonalité.* —

- Def : On dit que $x \perp_q y$ ssi $b(x,y) = 0$. On définit $A^{\perp_q} := \{x \in E \text{ tq } b(x,y) = 0 \forall y \in A\}$. On dit que $A \perp_q B$ ssi $b(x,y) = 0 \forall x \in A, y \in B$.
- Pro : $A^{\perp_q}$ est un s-ev de E. On a $A \subset (A^{\perp_q})^{\perp_q}$. De plus, $A \subset B \Rightarrow B^{\perp_q} \subset A^{\perp_q}$.
- Pro : $E^{\perp_q} = N(q)$.
- Pro : Pour F un s-ev, on a $dim(F) + dim(F^{\perp_q}) = dim(E) + dim(F \cap N(q))$, et $(F^{\perp_q})^{\perp_q} = Vect(F, N(q))$.

*2. Bases orthogonales.* —

- Def : Une base de E $(x_1, \dots, x_n)$ est une base $q-orthogonale$ de E ssi les $x_i$ sont q-orthogonaux deux à deux.
- Rem : Dans une telle base, la forme matricielle de q est diagonale.
- Thm : Toute forme quadratique q sur E possède une base q-orthogonale.
- Méthode de Gauss.
- Rem : Cela permet de construire des bases q-orthogonales.
- Ex : Un exemple.
- Ex : $q((x,y,z)) = xy + yz + zx$.

*3. Groupe orthogonal associé à une forme quadratique.* —

- On veut étudier les éléments de $End(E)$ qui préservent q.
- Def : On note $O(q)$ l'ensemble de $f \in End(E)$ tels que $q \circ f = f$.
- Pro : $O(q)$ est un groupe.
- Pro : Pour B une base de E, A la forme matricielle de q et $M := Mat(f, b)$, on a $f \in O(q) \Leftrightarrow M^t.A.M = A$.
- Pro : Si $f \in O(q)$, alors son adjoint $f^*$ est dans $O(q)$.
- Ex : Pour $q(x) =< x, x >$, $f \in O(q)$ ssi $f \circ f^* = id_E$, càd ssi $M = Ma(f, B)$ vérifie $M^t.M = I_n$.
- Ex : $q((x,y)) = 2xy$. La base $B := \{(1,1),(1,-1)\}$ est q-orthogonale, et $f \in O(q)$ ssi $M = Mat(f, B)$ vérifie.

*4. Isotropie.* —

- Def : Le cône isotrope I de q est $\{x \in E \text{ tq } q(x) = 0\}$.
- Pro : On a $N(q) \subset I$. I est stable par multiplication par un scalaire, mais il n'est pas stable par addition.
- Contre-ex : $q((x,y)) = 2xy$. On a $(0,1),(1,0) =\in I$ mais $(1,1) \notin I$.
- Def : Un s-ev F de E est isotrope ssi l'intersection de F et de $F^{\perp_q}$ est non-réduite à $\{0\}$. F est anisotrope sinon. On dit que F est totalement isotrope si $F \subset F^{\perp_q}$.
- Rem : Si F est anisotrope, alors $dim(E) = dim(F) + dim(F^{\perp_q})$
- Pro : Caractérisations de l'isotropie/l'isotropie totale.
- Ex : Pour $q((x,y,z)) = 2yz$, $F = Vect((1,0,0),(0,1,0))$ est totalement isotrope. $F_2 = Vect((0,1,1))$ est anisotrope.

# 3. Réduction et classification des formes quadratiques. —

1. *Classification.* —
   - Def : Relation d'équivalence de formes quadratiques à un isomorphisme linéaire près.
   - Pro : $q \sim q' \Leftrightarrow \exists P \in Gl_n(\mathbb{K})$ tq $A' = P^t.A.P$.
   - Def : Le discriminant de q est la classe de $det(A)$ dans $\mathbb{K}^*/((\mathbb{K}^*)^2)$ si q est non-dégénérée, et vaut 0 si q est dégénérée. Il ne dépend pas de la base choisie.
   - Rem : $\mathbb{R}^*/((\mathbb{R}^*)^2)$ s'identifie à $\{\pm 1\}$. $\mathbb{C}^*/((\mathbb{C}^*)^2)$ s'identifie à $\{1\}$. $\mathbb{F}_l^*/((\mathbb{F}_l^*)^2)$ s'identifie à $\{1, \varepsilon\}$ où $\varepsilon$ est un non-carré de $\mathbb{F}_l$.
   - Pro : Deux formes quadratiques équivalentes ont même rang, des noyaux de même dimension, et même discriminant. Mais cela n'est pas suffisant pour caractériser cette équivalence.
   - Contre-ex : $\pm(x^2 + y^2)$ sur $\mathbb{R}^2$ ont même rang et même discriminant, mais ne sont pas équivalentes.
2. *Réduction des formes quadratiques.* —
   - Thm : Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $rg(q) = r$, alors q est équivalente à $x \mapsto x_1^2 + \cdots + x_r^2$.
   - Théorème d'inertie de Sylvester : Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et q est de rang r, alors on a un $0 \leq p \leq r$ tel que q soit équivalente à $x \mapsto x_1^2 + \cdots + x_p^2 - (x_{p+1}^2 + \cdots + x_r^2)$.
     On dit alors que q est de signature $(p, r-p)$ et ce couple ne dépend que de q.
   - App : Une forme quadratique réelle est définie ssi $r = q$. Elle est positive ssi $p = r$ et négative ssi $p = 0$.
   - Ex : Pour $n = 2$ et $q((x, y)) = ax^2 + bxy + cy^2$ avec $a > 0$, on a $det(A) \equiv b^2 - 4ac$ et le signe de $b^2 - 4ac$ détermine la signature de q.
   - App : Il y a n+1 classes d'équivalences de formes quadratiques non-dégénérées sur $\mathbb{R}^n$.
   - Rem : Dans l'étude du groupe orthogonal, on peut s'intéresser à $O(sign(q))$ plutôt que $O(q)$ car ces groupes sont conjugués.
   - Thm : Si $K = \mathbb{F}_l$ et $rg(q) = r$, alors q est équivalente à $x \mapsto x_1^2 + \cdots + x_r^2$ ou à $x \mapsto \varepsilon.x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_r^2$, avec $\varepsilon$ un non-carré de $\mathbb{F}_l$.
   - **Dev** : Loi de réciprocité quadratique : Soient p,m des nombres premiers impairs distincts.
     Alors $(\frac{p}{m}) = (\frac{m}{p}).(-1)^{\frac{p-1}{2}.\frac{m-1}{2}}$, où $(\frac{x}{p}) = \begin{cases} 1 \text{ si x est un carré mod(p)} \\ 0 \text{ si } x = 0 \text{ mod(p)} \\ -1 \text{ sinon} \end{cases}$
3. *Réduction simultanée sur un espace euclidien.* —
   - Théorème de réduction simultanée .
   - Application de la méthode de réduction simultanée sur un exemple.
   - Rem : Cette méthode est moins efficace que la méthode de Gauss mais permet d'avoir une base orthogonale à la fois pour q et pour le produit scalaire ambiant. Elle est utile pour déterminer la forme d'une quadrique sur une base orthonormée sans avoir à la dilater/contracter.

**4. Quelques applications.** —

1. *Etude de la hessienne.* —
   - Def : Pour $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable, on appelle hessienne de f la différentielle seconde de f, notée $D_x^{(2)}(f)(.,.)$.
   - Pro : C'est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n$, dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est $(\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial}{\partial x_j} f))_{i,j}$.
   - Théorème de Schwarz : $D_x^{(2)}(f)(.,.)$ est symétrique.
   - On peut ainsi associer à la hessienne de f une forme quadratique.
   - Thm : f admet un maximum/minimum local ssi $D_x(f) \equiv 0$ et si $D_x^{(2)}(f)$ est positive/négative.
   - On peut ainsi étudier les extrema d'une fonction 2 fois différentiable f en regardant les x pour lesquels $D_x(f)$ est nulle, puis en étudiant la signature de $D_x^{(2)}(f)$.
   - Ex : $f(x) =< Ax, x > - < b, x >$ avec A symétrique définie positive. $D_x(f)(h) = 2 < Ax, h > - < b, h >=< (2Ax + b), h >$ s'annule en $x_0 = -\frac{1}{2}A^{-1}.b$. Et $D_{x_0}^2(f)(h, h) =< Ah, h >$ définie positive. Donc f admet un minimum global qui est atteint.
   - **Dev :** Lemme de Morse : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $C^3$. Soit $x \in U$ tq $D_x(f) = 0$, et soit $(p, q)$ la signature de la hessienne de f, $D_x^2(f)$.
     Alors il existe un voisinage V de x, W un voisinage de 0, et $g : V \to W$ un $C^1$-difféomorphisme tel que $\forall y \in W$, $f(g^{-1}(y)) = f(x) + y_1^2 + \cdots + y_p^2 - (y_{p+1}^2 + \cdots + y_{p+q}^2)$.
   - App : Equation de la tangente en un point double dans $\mathbb{R}^2$.
   - App : Etude locale d'une surface par rapport à son plan tangent via une forme quadratique.
2. *Classification des coniques et quadriques.* —
   - Def : Une quadrique de $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des solutions d'une équation de la forme $q(x) + l(x) + c = 0$, où q est quadratique, l est linéaire, c est constante.
   - Ex : $3x^2 + 2y^2 + 2xy - 4x - 6 = 0$.
   - Etant donné une quadrique d'équation $q(x)+l(x)+c = 0$, la quadrique homogénéisée à cette équation est $Q(x, z) = q(x) + l(x)z + cz^2$, définie sur $\mathbb{R}^{n+1}$.
   - Rem : $C = I(Q) \cap \{z = 1\}$. Si $n = 2$, on parle de coniques. Selon $I(Q)$ et $I(q)$, on peut classifier les coniques.
   - Pro : Classification affine des coniques en fonction de Q et q. (Dans un grand tableau prenant la signature de Q, la forme de I(q), et la conique résultant de cela).
   - Pro : Par 5 points du plan passe une conique. Elle est unique ssi aucun sous-ensemble de 4 points parmi les 5 n'est aligné.

**Références**

Grifone : Rang et noyau d'une forme quadratique. Groupe orthogonal de q, Méthode de Gauss, exemples. Isotropie. Théorème de Sylvester, signature. Théorème de réduction simultanée, méthode, exemple. Coniques, classification des coniques.
Gourdon : Def forme bilin sym, quadratique, forme polaire, forme matricielle. Formes quadratiques positives, définies, Schwarz, Minkowski. Orthogonalité et bases q-orthogonales.

Perrin : Equivalence de formes quadratiques, discriminant, Exemple, contre-exemple. Réduction de formes quadratiques.
Rouvière : Hessienne, étude des extrema locaux. Lemme de Morse.(Dev)
Caldero,Germoni : Loi de réciprocité quadratique.(Dev)

---

*May 23, 2017*

*Vidal Agniel*, *École normale supérieure de Rennes*